Correction Feuille Exercice 3

Démontrer par récurrence

Exercice 10
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n = 3^n - 1\}$.

- **Initialisation :** On a bien $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2 \\ &= 3(3^n - 1) + 2 \\ &= 3^{n+1} - 3 + 2 \\ &= 3^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 1}$.

Exercice 11 (*)
La suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 4v_n + 1$. On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ v_n = \frac{1}{3}(4^n - 1) \right\}.$$

- **Initialisation :** On a bien $\frac{1}{3}(4^0 - 1\frac{1}{3}(1 - 1) = 0 = v_0$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4v_n + 1 \\ &= \frac{4}{3}(4^n - 1) + 1 \\ &= \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)}$.

Exercice 12 (**)
Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1 + u_n^2} \end{array} \right.$$

puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence. On a les calculs suivantes

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10} \\ u_2 &= \sqrt{1+(\sqrt{10})^2} = \sqrt{11} \\ u_3 &= \sqrt{12}\dots \end{aligned}$$

On conjecture que les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n = \sqrt{9+n}\}$ sont vraies. On va les montrer par récurrence.

- **Initialisation :** On a bien $\sqrt{9+0} = 3 = u_0$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2} \\ &= \sqrt{1+(\sqrt{9+n})^2} \\ &= \sqrt{9+(n+1)} \end{aligned}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{9+n}}$.

Exercice 13 (**)

Montrer par récurrence la propriété suivante :

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

On note les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} \right\}$$

- **Initialisation :** On a bien $\frac{(0+1)(u_0+u_0)}{2} = u_0$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} &= \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} + u_{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(u_0+u_0+nr)}{2} + u_0 + (n+1)r \\ &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} + u_0 + (n+1)r \\ &= (n+2)u_0 + \frac{(n+2)(n+1)r}{2} \end{aligned}$$

  Or

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)(u_0+u_{n+1})}{2} &= \frac{(n+2)(u_0+u_0+(n+1)r}{2} \\ &= (n+2)u_0 + \frac{(n+2)(n+1)r}{2} \end{aligned}$$

  Donc,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} = \frac{(n+2)(u_0+u_{n+1})}{2}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}}$.

Exercice 14 (***)
Pour cet exercice, on rappelle qu'un nombre est un multiple de 11 s'il peut s'écrire sous la forme $11k$ avec $k \in \mathbb{N}$.On va montrer par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n : \{10^n - (-1)^n \text{ est un multiple de } 11\}.$$

- **Initialisation :** On a bien que $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 11 donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $10^n - (-1)^n = 11k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 10 \times 10^n + (-1)^n \\ &= 10 \times (10^n - (-1)^n + (-1)^n) + (-1)^n \\ &= 10 \times (10^n - (-1)^n) + 10 \times (-1)^n + (-1)^n \\ &= 10 \times 11k + 11 \times (-1)^n \\ &= 11 \times (10k + (-1)^n) \end{aligned}$$

Or $10k + (-1)^n$ est un entier naturel. Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 10^n - (-1)^n \text{ est un multiple de } 11}$.

Déterminer la monotonie

Exercice 15

1. En posant la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on remarque que $u_n = f(n)$. La fonction f étant décroissante,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est également décroissante.}}$$
2. En posant la fonction $f(x) = \ln(x)$, on remarque que $u_n = f(n)$. La fonction f étant croissante,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est également croissante.}}$$
3. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$, on regarde alors
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}}{\frac{3^n}{4^{n-1}}} \\ &= \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{4^{n-1}}{4^n} \\ &= \frac{3}{4} < 1 \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$
Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = e^{u_n} \geq 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

Exercice 16 (*)

On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n$: $\{u_n$ existe et $u_n > 0\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 > 0$ qui est bien définie donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors u_n bien définie et strictement supérieur à 0. Donc comme $u_n \neq 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est bien défini et
   $$u_n > 0, \quad \frac{1}{u_n} > 0$$
   Or la somme de deux nombres strictement positifs est positif donc $u_{n+1} > 0$.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0}$.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$
d'après la question précédente. Donc,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

Exercice 17 (**)

On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \exp(u_n) - 1$ et la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1$.

1. Pour étudier l'équation $f(x) = x$, on pose la fonction $g : x \to f(x) - x = e^x - 1 - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = e^x - 1$$
On dresse le tableau de variation de la fonction g en étudiant l'inéquation $e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variation, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc
$$f'(x) = e^x > 0$$
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante.}}$$

On suppose ici que $u_0 = 1$.

2. On montre tout d'abord que $u_n \leq u_{n+1}$. On a vu précédemment que $f(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = u_n$, on a
$$\boxed{u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n.}$$
On va montrer désormais par récurrence que $1 \leq u_n$. On note les propositions $\mathcal{P}_n : \{1 \leq u_n\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 \geq 1$ qui est bien définie donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors
   $$\begin{aligned} 1 \leq u_n &\Longrightarrow f(1) \leq f(u_n) \quad f \text{ est croissante} \\ &\Longrightarrow 1 \leq e - 1 \leq u_{n+1} \end{aligned}$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1}}$.
3. On pose la fonction $h(x) = f(x) - (e-1)x = e^x - 1 - (e-1)x$. Cette fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et
$$h'(x) = e^x - (e-1) = e^x - e + 1$$
Or si $x \geq 1$, on a $e^x \geq e$ et donc la fonction $h'(x)$ est positive et donc la fonction h est strictement croissante. Comme $h(1) = e - 1 - (e-1) = 0$, on en déduit que la fonction h est positive ou nulle. Donc
$$\boxed{\forall x \geq 1, \quad f(x) \geq (e-1)x.}$$
4. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq (e-1)^n\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 = 1 = (e-1)^0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $u_n = (e-1)^n$. Comme $u_n \geq 1$, on a alors
   $$\begin{aligned} f(u_n) \geq (e-1)u_n &\Longrightarrow u_{n+1} \geq (e-1) \times (e-1)^n \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \geq (e-1)^{n+1} \end{aligned}$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1}}$.

Déterminer si la suite est majorée ou minorée

Exercice 18

Soit u la suite telle que $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 2u_n$. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 3 \times 2^n\}$.

- **Initialisation :** On a bien $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $u_n \geq 3 \times 2^n$. Comme $u_{n+1} \geq 2u_n$, on a alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq 2u_n &\Longrightarrow u_{n+1} \geq 2 \times 3 \times 2^n \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \geq 3 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$
Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 3 \times 2^n}$.

Exercice 19 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n > 0\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n > 0$. On a donc $u_n \geq 0$. Donc on a également $1 + u_n > 0$ et
   $$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} > 0$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.
2. On calcule
$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2},\quad u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},\quad u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \text{ et } u_4 = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}}$$
On conjecture alors la formule
$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+1}.}$$
3. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{u_n = \dfrac{1}{n+1}\right\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 = 1 = \dfrac{1}{1+0}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n > 0$. On a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Donc on a
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+1+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}}$.

Exercice 20 (**)
Dans cet exercice on considère des suites monotones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0.

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq u_0\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 \geq u_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n > 0$. On a donc $u_n \geq u_0$. La suite étant croissante on a
   $$u_{n+1} \geq u_n \geq u_0$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minorée par } u_0.}$.

2. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \leq u_0\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 \leq u_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n > 0$. On a donc $u_n \leq u_0$. La suite étant croissante on a
   $$u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$$
   Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est majorée par } u_0.}$.

Déterminer la formulation explicite des suites classiques.

Exercice 21
Déterminer les formules explicites des suites suivantes :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n + 4$. On reconnait une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation $x = 5x + 4$
$$x = 5x + 4 \iff -4x = 4 \iff x = -1$$
On pose alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$. On vérifie que la suite (v_n) est géométrique. En effet
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 5u_n + 4 + 1 \\ &= 5(u_n + 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5. De plus $v_0 = u_0 + 1 = 3$. Nous avons donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 5^n$. On en déduit donc que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 5^n - 1.}$$

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation $x^2 = 2x - 1$
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0.$$
Cette équation n'ayant qu'une solution, la suite s'écrit explicitement
$$v_n = (\alpha + \beta n)1^n = \alpha + \beta n$$
On a alors $v_0 = \alpha$ et $v_0 = 1$ donc $\alpha = 1$. De même $v_1 = \alpha + \beta$ et $v_1 = 2$ donc $\beta + 1 = 2 \iff \beta = 1$. On conclut que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 + n.}$$

3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} + 5w_{n+1} + 4w_n = 0$. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation $x^2 + 5x + 4 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 25 - 16 = 9$. Cette équation a donc 2 solutions
$$x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

Cette équation ayant deux solutions, la suite s'écrit explicitement

$$w_n = \alpha(-4)^n + \beta(-1)^n$$

On utilise les conditions $w_0 = 1$ et $w_1 = 0$ pour poser le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ -4\alpha - \beta & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ -3\alpha & = 1 \quad L_2 + L_1 \to L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta & = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \\ \alpha & = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La suite s'exprime donc ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = -\frac{1}{3} \times (-4)^n + \frac{4}{3} \times (-1)^n.}$$

Exercice 22 (*)
La suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n}{2u_n - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{2}$. On admet que les termes u_n et v_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2u_n - 1}{3u_n} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3u_n} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{3u_n} + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } (-1/3).}$$

2. Le premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = 4 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{7}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Or comme $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{2} \iff v_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{u_n} \iff u_n = \dfrac{1}{v_n + \frac{1}{2}}$, On en déduit

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\frac{7}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}}.}$$

Exercice 23 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$.

On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3^{n+1}}u_n + \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. On note que $v_0 = 0$ On résout alors l'équation

$$\begin{aligned} x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} &\iff \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $w_n = v_n - 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 1 \\ &= \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}(v_n - 1) \\ &= \frac{2}{3}w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = -1$. On a alors

$$w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = 3^n v_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n}$$

Exercice 24 (**)
On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2$; $y_0 = -1$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} & = & -2x_n + y_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} & = & 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la première équation
$$x_{n+2} = -2x_{n+1} + y_{n+1}.$$
En utilisant la seconde équation, on a alors
$$x_{n+2} = -2x_{n+1} + 2x_n - 3y_n$$
En utilisant encore la première équation, on utilise $y_n = x_{n+1} + 2x_n$ et donc
$$\begin{aligned} & x_{n+2} = -2x_{n+1} + 2x_n - 3x_{n+1} - 6x_n \\ \Longleftrightarrow & \boxed{x_{n+2} = -5x_{n+1} - 4x_n} \end{aligned}$$

2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout alors l'équation $x^2+5x+4=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 25 - 16 = 9$. Elle possède donc deux solutions
$$x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1, \qquad x_2 = \frac{-5-3}{2} = -4$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc pour formule explicite
$$x_n = \alpha(-1)^n + \beta(-4)^n$$
Nous avons de plus $x_0 = 2$ et $x_1 = -2x_0 + y_0 = -4 - 1 = -5$. On a alors le système
$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 2 \\ -\alpha - 4\beta & = -5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = 2 \\ -3\beta & = -3 \quad L_2 + L_1 \to L_2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1 \\ \beta & = 1 \end{cases}$$
Ainsi on a $x_n = (-1)^n + (-4)^n$. On en déduit en utilisant encore la formule $y_n = x_{n+1} + 2x_n$ que
$$\begin{aligned} & y_n = (-1)^{n+1} + (-4)^{n+1} + 2((-1)^n + (-4)^n) \\ \Longleftrightarrow & y_n = (-1)^n(-1+2) + (-4)^n(-4+2) \\ \Longleftrightarrow & \boxed{y_n = (-1)^n - 2 \times (-4)^n} \end{aligned}$$

Exercice 25 (**)
On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}.$$

1. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{3b_n}{4} - \frac{b_n}{3} + \frac{a_n}{4} - \frac{2a_n}{3} \\ &= \frac{9b_n}{12} - \frac{4b_n}{12} + \frac{3a_n}{12} - \frac{8a_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}b_n - \frac{5}{12}a_n \\ &= \frac{5}{12}(b_n - a_n) = \frac{5}{12}u_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{5}{12} \text{ et de premier terme } u_0 = 12.}$$

(b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = 12\left(\frac{5}{12}\right)^n.}$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.

(a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4b_{n+1} + 3a_{n+1} \\ &= 4 \times \frac{a_n + 3b_n}{4} + 3 \times \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= a_n + 3b_n + 2a_n + b_n \\ &= 4b_n + 3a_n = v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc constante.}}$$

(b) La suite étant constante, pour tout n entier,

$$\boxed{v_n = v_0 = 48.}$$

3. D'après les questions précédentes, on a donc pour n entier

$$\begin{cases} b_n - a_n &= 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ 4b_n + 3a_n &= 48 \end{cases} \iff \begin{cases} b_n - a_n &= 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ 7b_n &= 48 + 36 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \end{cases} \quad L_2 + 3L_1 \to L_2$$

$$\iff \begin{cases} a_n &= b_n - 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ b_n &= \frac{48}{7} + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} a_n &= \frac{48}{7} - \frac{48}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ b_n &= \frac{48}{7} + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \end{cases}}$$

4. On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= b_0 + b_1 + \ldots + b_n \\ &= \frac{48}{7} + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^0 + \frac{48}{7} + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^1 + \ldots + \frac{48}{7} + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ &= (n+1) \times \frac{48}{7} + \left(\frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^0 + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^1 + \ldots + \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) \\ &= \frac{48}{7}(n+1) + \frac{36}{7} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{12}} \\ &= \frac{48}{7}(n+1) + \frac{36}{7} \times \frac{12}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}\right) \\ &= \boxed{\frac{48}{7}(n+1) + \frac{432}{49}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}\right)} \end{aligned}$$

Exercice 26 (***)
La suite de Fibonacci est une suite très célèbre. Elle est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n entier $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On résout l'équation $x^2 = x + 1$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = (-1)^2 + 4 = 5$. Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La suite (u_n) a pour formule explicite

$$u_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

avec λ et μ deux réels. Afin de déterminer λ et μ, on a le système

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & = 1 \end{cases}
&\iff \begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda \left(1-\sqrt{5}\right) + \mu \left(1+\sqrt{5}\right) & = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda & = 1-\mu \\ \lambda \left(1-\sqrt{5}\right) + \mu \left(1+\sqrt{5}\right) & = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda & = 1-\mu \\ (1-\mu) \left(1-\sqrt{5}\right) + \mu \left(1+\sqrt{5}\right) & = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda & = 1-\mu \\ 2\mu\sqrt{5} & = 2-1+\sqrt{5} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda & = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ \mu & = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{u_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$